

# 2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学（一）

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分，考试时间 150 分钟。

### 第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出一项最符合题目要求的。

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = 2$ , 则  $b =$

A. 2

B. 1

C.  $\frac{1}{2}$

D. -2

2. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x^2$  为  $x$  的

A. 低阶无穷小量

B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量

D. 高阶无穷小量

3. 设函数  $f(x)$  满足  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = 1$ , 则  $f'(1) =$

A. 2

B. 1

C.  $\frac{1}{2}$

D. -1

4. 设  $y = x + e^{-x}$ , 则  $dy \Big|_{x=1} =$

A.  $e^{-1} dx$

B.  $-e^{-1} dx$

C.  $(1 + e^{-1}) dx$

D.  $(1 - e^{-1}) dx$

5. 曲线  $y = x \ln x$  在点  $(e, e)$  处法线的斜率为

A.  $-2$

B.  $-\frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $2$

6.  $\int (\cos x)' dx =$

A.  $\sin x + C$

B.  $\cos x + C$

C.  $-\sin x + C$

D.  $-\cos x + C$

7.  $\int_{-1}^1 (x \cos x + 1) dx =$

A.  $-2$

B.  $-1$

C.  $1$

D.  $2$

8.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx =$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{4}$

C.  $-\frac{1}{4}$

D.  $-\frac{1}{2}$

9. 设  $z = y^5 + \arctan x$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$

A.  $5y^4 + \frac{1}{1+x^2}$

B.  $\frac{1}{1+x^2}$

C.  $5y^4$

D.  $5y^4 + \arctan x$

10. 设  $z = e^{2x-y}$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

A.  $-e^{2x-y}$

B.  $e^{2x-y}$

C.  $-2e^{2x-y}$

D.  $2e^{2x-y}$

## 第 II 卷(非选择题,共 110 分)

二、填空题:11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} =$  \_\_\_\_\_.

12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{2n^2 + 4n + 5} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设函数  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ , 则  $f(x)$  的间断点为  $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设  $y = xe^x$ , 则  $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 设  $y = y(x)$  是由方程  $y + e^y = x$  所确定的隐函数, 则  $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 曲线  $y = \frac{1}{x-2}$  的铅直渐近线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

17.  $\int xe^{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

18.  $\frac{d}{dx} \left( \int_2^x \tan t dt \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

19.  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 过坐标原点且与平面  $3x - 7y + 5z - 12 = 0$  平行的平面方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题:21~28 小题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。

21. (本题满分 8 分)

设函数  $f(x) = \begin{cases} 2ax + a^2, & x > 1, \\ -x, & x \leq 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  处连续, 求  $a$ .

22. (本题满分 8 分)

设  $y = \frac{\ln x}{x}$ , 求  $dy$ .

23. (本题满分 8 分)

计算  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

24. (本题满分 8 分)

求曲线  $y = 2x^3 - 6x^2$  的凹、凸的区间及拐点.

25. (本题满分 8 分)

设  $z = \ln(x + y^2)$ , 求  $dz \Big|_{(1,1)}$ .

26. (本题满分 10 分)

求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2$  的通解.

27. (本题满分 10 分)

计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x = 0, y = x$  和  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域.

28. (本题满分 10 分)

将  $y = e^{x+1}$  展开成  $x$  的幂级数.

## 参考答案及解析

### 一、选择题

1. [答案] A

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+bx) \sim bx$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = 2$ .

2. [答案] D

【考情点拨】 本题考查了高阶无穷小量的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , 故当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x^2$  为  $x$  的高阶无穷小量.

3. [答案] A

【考情点拨】 本题考查了函数的导数的知识点.

【应试指导】  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = 2$ .

4. [答案] D

【考情点拨】 本题考查了函数的微分的知识点.

【应试指导】  $dy = (x + e^{-x})' dx = (1 - e^{-x}) dx$ , 因此  $dy \Big|_{x=1} = (1 - e^{-x}) \Big|_{x=1} dx = (1 - e^{-1}) dx$ .

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的法线的知识点.

【应试指导】  $y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ , 因此曲线在点  $(e, e)$  处切线的斜率为  $y' \Big|_{x=e} = (\ln x + 1) \Big|_{x=e} = 2$ . 故其法线的斜率为  $-\frac{1}{2}$ .

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的基本性质的知识点.

【应试指导】  $\int (\cos x)' dx = \int d(\cos x) = \cos x + C$ .

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】  $\int_{-1}^1 (x \cos x + 1) dx = \int_{-1}^1 x \cos x dx + \int_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2$ .

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了广义积分的计算的知识点.

【应试指导】  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \Big|_1^{+\infty} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial y} = (y^5)' = 5y^4$ .

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的高阶偏导数的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2x-y} \cdot 2 = 2e^{2x-y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{2x-y} \cdot (-1) = -2e^{2x-y}$ .

11.【答案】  $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} = \frac{0+1}{0+0+3} = \frac{1}{3}$ .

12.【答案】  $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算法则的知识点.

【应试指导】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2+4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2}$ .

13.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 函数在  $x=0$  处无定义, 故其间断点为  $x=0$ .

14.【答案】  $(x+1)e^x$

【考情点拨】 本题考查了函数导数的知识点.

【应试指导】  $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ .

15.【答案】  $\frac{1}{1+e^y}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对  $x$  求导, 得  $y' + e^y \cdot y' = 1$ , 即  $y' = \frac{1}{1+e^y}$ .

16.【答案】  $x = 2$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 当  $x \rightarrow 2$  时,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ , 故  $x = 2$  为曲线的铅直渐近线.

17.【答案】  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的第一换元积分法的知识点.

【应试指导】  $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ .

18.【答案】  $\tan x$

【考情点拨】 本题考查了变上限定积分的性质的知识点.

【应试指导】  $\frac{d}{dx} \left( \int_2^x \tan t dt \right) = \tan x$ .

11.【答案】  $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} = \frac{0+1}{0+0+3} = \frac{1}{3}.$

12.【答案】  $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算法则的知识点.

【应试指导】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2+4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2}.$

13.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 函数在  $x=0$  处无定义,故其间断点为  $x=0$ .

14.【答案】  $(x+1)e^x$

【考情点拨】 本题考查了函数导数的知识点.

【应试指导】  $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$

15.【答案】  $\frac{1}{1+e^y}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对  $x$  求导,得  $y' + e^y \cdot y' = 1$ ,即  $y' = \frac{1}{1+e^y}.$

16.【答案】  $x=2$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 当  $x \rightarrow 2$  时,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ ,故  $x=2$  为曲线的铅直渐近线.

17.【答案】  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的第一换元积分法的知识点.

【应试指导】  $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

18.【答案】  $\tan x$

【考情点拨】 本题考查了变上限定积分的性质的知识点.

【应试指导】  $\frac{d}{dx} \left( \int_2^x \tan t dt \right) = \tan x.$

19.【答案】  $\frac{\pi}{4}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

20.【答案】  $3x - 7y + 5z = 0$

【考情点拨】 本题考查了平面方程的知识点.

【应试指导】 已知所求平面与  $3x - 7y + 5z - 12 = 0$  平行, 则其法向量为  $(3, -7, 5)$ , 故所求方程为  $3(x-0) + (-7)(y-0) + 5(z-0) = 0$ , 即  $3x - 7y + 5z = 0$ .

### 三、解答题

21.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + a^2) = 2a + a^2,$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1.$



由于  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续,

所以  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , 即  $2a + a^2 = -1$ .

解得  $a = -1$ .

$$22. y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$dy = y' dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx.$$

$$23. \text{令 } t = \sqrt{x}, \text{ 则 } x = t^2, dx = 2t dt.$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t \cos t}{t} dt$$

$$= 2 \int \cos t dt$$

$$= 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

$$24. y' = 6x^2 - 12x, y'' = 12x - 12.$$

由  $y'' = 12x - 12 = 0$  得  $x = 1$ .

当  $x < 1$  时,  $y'' < 0$ , 因此在区间  $(-\infty, 1)$  曲线是凸的;

当  $x > 1$  时,  $y'' > 0$ , 因此在区间  $(1, +\infty)$  曲线是凹的;

当  $x = 1$  时,  $y = -4$ , 点  $(1, -4)$  为曲线的拐点.

$$25. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2},$$

$$\text{于是 } dz = \frac{1}{x + y^2} dx + \frac{2y}{x + y^2} dy,$$

$$\text{因此 } dz \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2} dx + dy.$$

$$26. \text{原方程对应的齐次方程的特征方程为 } r^2 - 3r + 2 = 0,$$

特征根为  $r_1 = 1, r_2 = 2$ .

故原方程对应的齐次方程的通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ ,

$y^* = 1$  为原方程的特解,

所以原方程的通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1$ .

27. 在极坐标系中,  $D$  可表示为  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$ .

$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos\theta \sin\theta \cdot r dr \\&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d(\sin\theta) \cdot \int_0^1 r^3 dr \\&= \frac{1}{2} \sin^2\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \\&= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

28.  $e^{x+1} = e \cdot e^x$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty).$$