

2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分。共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$, 则 $m =$	【 】
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2	
2. 设 $y = e^x + \cos x$, 则 $y' =$	【 】
A. $e^x + \cos x$ B. $e^x - \cos x$ C. $e^x - \sin x$ D. $e^x + \sin x$	
3. 设 $y = x \tan x$, 则 $y' =$	【 】
A. $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$ B. $\frac{x}{\cos^2 x}$ C. $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ D. $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$	
4. 设 $y = \frac{1}{1+x}$, 则 $y'' =$	【 】
A. $-\frac{2}{(1+x)^3}$ B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$ C. $\frac{1}{(1+x)^2}$ D. $\frac{2}{(1+x)^3}$	
5. 曲线 $y = x^3 + 1$ 的拐点为	【 】
A. (0,0) B. (0,1) C. (-1,0) D. (1,1)	

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos 2x$, 则 $f(x) =$	【 】
A. $-\sin 2x$ B. $\sin 2x$ C. $-2\sin 2x$ D. $2\sin 2x$	
7. 设 $\int_{-a}^a (x^3 + x^2) dx = \frac{2}{3}$, 则 $a =$	【 】
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2	
8. 设 $z = \sin(x - 3y^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$	【 】
A. $-6y\cos(x - 3y^2)$ B. $-6y\sin(x - 3y^2)$ C. $6y\cos(x - 3y^2)$ D. $6y\sin(x - 3y^2)$	

9. 设 $z = f(x^2 + y)$, 其中 f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

A. $xf''(x^2 + y)$

B. $2xf''(x^2 + y)$

C. $yf''(x^2 + y)$

D. $2xyf''(x^2 + y)$

10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, 则 $P(A+B) =$

A. 0.4

B. 0.5

C. 0.7

D. 0.9

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$ _____.

14. 设 $y = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 则 $y'(1) =$ _____.

15. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(x) =$ _____.

16. 曲线 $y = 2x^3 + x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的斜率为 _____.

17. $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$ _____.

18. $\int x(x^2 - 1) dx =$ _____.

19. $\int_0^1 (x + e^x) dx =$ _____.

20. 设函数 $f(x, y) = x + y$, 则 $f(x+y, x-y) =$ _____.

三、解答题(21~28 题, 共 70 分, 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int (2\arcsinx + 1) dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数,

- (1)求 a ;
- (2)求 $E(X)$.

26. (本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数,求 $\frac{dy}{dx}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域.

- (1)求 D 的面积;
- (2)求 D 绕 x 轴旋转一周 所得旋转体的体积。

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值.

2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)参考答案及解析

二、解答题及解题

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】本题考查了等价无穷小的代换的知识点。

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 2$ 。

2.【答案】C

【考情点拨】本题考查了函数求导的知识点。

【应试指导】 $y' = (e^x + \cos x)' = (e^x)' + (\cos x)' = e^x - \sin x$ 。

3.【答案】A

【考情点拨】本题考查了函数求导的知识点。

【应试指导】 $y' = (x \tan x)' = \tan x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$ 。

4.【答案】D

【考情点拨】本题考查了函数的二阶导数的知识点。

【应试指导】 $y' = -\frac{1}{(1+x)^2}, y'' = -(-2) \frac{1}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$ 。

5.【答案】B

【考情点拨】本题考查了曲线拐点的知识点。

【应试指导】 $y' = 3x^2, y'' = 6x$ ，令 $y'' = 0$ ，得 $x = 0, y = 1$ 。当 $x > 0$ 时， $y'' > 0$ ；当 $x < 0$ 时， $y'' < 0$ ，因此曲线的拐点为 $(0, 1)$ 。

6.【答案】C

【考情点拨】本题考查了原函数定义的知识点。

【应试指导】由题可知 $f(x) = (\cos 2x)' = -2 \sin 2x$ 。

7.【答案】C

【考情点拨】本题考查了定积分的基本性质的知识点。

【应试指导】 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \int_{-a}^a x^2 dx + \int_{-a}^a x^3 dx = 2 \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 = \frac{2}{3}$ ，因此 $a = 1$ 。

8.【答案】A

【考情点拨】本题考查了二元函数的偏导数的知识点。

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x - 3y^2) \cdot (-6y) = -6y \cos(x - 3y^2)$ 。

9.【答案】B

【考情点拨】本题考查了复合函数的二阶偏导数的知识点。

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 + y) \cdot 2x = 2x f'(x^2 + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x f''(x^2 + y)$ 。

10.【答案】D

【考情点拨】本题考查了概率的性质的知识点。

【应试指导】事件 A 与 B 互斥，故 $P(AB) = 0$ ，因此 $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.4 = 0.9$ 。

二、填空题

11.【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】本题考查了两个重要极限的知识点。

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$ 。

12.【答案】e

【考情点拨】本题考查了分段函数的连续性的知识点。

【应试指导】由于函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，故有 $f(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 。

13.【答案】2

【考情点拨】本题考查了函数极限的四则运算的知识点。

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 2$ 。

14.【答案】0

【考情点拨】本题考查了复合函数的导数的知识点。

【应试指导】 $y' = -\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ，故 $y'(1) = 0$ 。

15.【答案】 $-\frac{2}{x^3} + 1$

【考情点拨】本题考查了函数的导数的知识点。

【应试指导】令 $t = \frac{1}{x}$ ，则有 $f(t) = \frac{1}{t^2} + t + 1$ ，即 $f(x) = \frac{1}{x^2} + x + 1$ ，因此 $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1$ 。

16.【答案】 -1

【考情点拨】本题考查了曲线法线的知识点。

【应试指导】 $y' = 6x^2 + 1$, 故 $y'(0) = 1$, 因此曲线在点 $(0, -1)$ 处的法线的斜率为 -1 .

17.【答案】 $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点。

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

18.【答案】 $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的性质的知识点。

$$\int x(x^2 - 1) dx = \int (x^3 - x) dx = \int x^3 dx - \int x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C.$$

19.【答案】 $e - \frac{1}{2}$

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点。

$$\int_1^e (x + e^x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + e^x \right) \Big|_1^e = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}.$$

20.【答案】 $2x$

【考情点拨】本题考查了复合函数的知识点。

$$f(x+y, x-y) = x+y+x-y = 2x.$$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

22. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} 23. \int (2\arcsinx + 1) dx &= 2x\arcsinx - 2 \int x d(\arcsinx) + x \\ &= 2x\arcsinx - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x \\ &= 2x\arcsinx + 2\sqrt{1-x^2} + x + C. \end{aligned}$$

24. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

当 $x = 1$ 时, $t = 1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$. 因此

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t} dt \\ &= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \\ &= 2 \ln(t+1) \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

28. 设 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 解得 $x = y$ 或 $x = -y$.

代入 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ 得 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在, 所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

又 $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$,

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为 $\frac{2}{3}$.

25. (1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

$$\text{所以 } a = 0.1.$$

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 \\ = 1.7.$$

26. 方程两边对 x 求导, 得 $e^x \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^x - 1}.$$

27. 由 $\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 解得交点坐标为 $(1, 3), (3, 1)$.

$$(1) D \text{ 的面积 } S = \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx \\ = \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x\right) \Big|_1^3 \\ = 4 - 3\ln 3.$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_1^3 \left[(4 - x)^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 \right] dx \\ = \pi \left[-\frac{1}{3}(4 - x)^3 + \frac{9}{x} \right] \Big|_1^3 \\ = \frac{8\pi}{3}.$$